Adı Soyadı: **04.07.2022**

Numara:

MAT 204 ANALİTİK GEOMETRİ II DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$ koniğinin $y = x$ kutup doğrusuna göre kutup noktasının koordinatlarını bulunuz.

2) $5x^2 - 4y = 0$ denklemli merkezil koniğin odak, doğrultman ve dış merkezliğini bulunuz.

3) $4mx^2 + (1+4m)xy + my^2 - x + 2y = 0$ konik ailesi içinde parabol olan koniğin denklemini bulunuz.

4) $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,1)$, $(-1,2)$ ve $(0,0)$ noktalarından geçen koniğin denklemini bulunuz.

5) Aşağıdaki kuadriklerin çeşidini belirleyiniz.

a) $2x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$

b) $2x^2 + 4y^2 - 9z^2 = -36$

c) $2x^2 + 4y^2 - z = 0$

d) $x - 2y^2 + 9z^2 = 0$

e) $xy - 1 = 0$

6) Orijin etrafında dönme açısı $\frac{\pi}{3}$ olan dönmenin denklemini yazarak $(0, 2\sqrt{3})$ noktasının resmini bulunuz.

7) $x\sqrt{3} - y + 2\sqrt{3} = 0$ doğrusuna göre yansımanın denklemini yazınız.

Not: Süre 90 dakikadır.

Prof. Dr. Emin KASAP

CEVAP ANAHTARI

1) $P(x_0, y_0)$ kutup noktası olsun.

$$\phi(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 4y + 2$$

alınırsa

$$\phi_x = 2x - 2y + 2 \quad \text{ve} \quad \phi_y = -2x + 4y - 4$$

olur. Böylece kutup doğrusunun denklemi

$$(2x_0 - 2y_0 + 2)x + (-2x_0 + 4y_0 - 4)y + 2x_0 - 4y_0 + 4 = 0$$

biçimindedir. Bu doğru $x - y = 0$ doğrusuyla aynı olmalıdır. Buradan

$$\frac{2x_0 - 2y_0 + 2}{1} = \frac{-2x_0 + 4y_0 - 4}{-1} \quad \text{ve} \quad 2x_0 - 4y_0 + 4 = 0$$

bulunur.

$$2x_0 - 2y_0 + 2 = 2x_0 - 4y_0 + 4 \Rightarrow 2y_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 1$$

olur.

$x_0 - 2y_0 + 2 = 0$ da $y_0 = 1$ yazılırsa

$x_0 = 0$ bulunur. $(x_0, y_0) = (0, 1)$ elde edilir.

2) Konik $x^2 = \frac{4y}{5}$ parabolüdür. $F(0,c)$ odaklı parabolün denklemi $x^2 = 4cy$ biçimindedir. $4c = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{1}{5}$ olur.

Böylece parabolün odağı $F(0, \frac{1}{5})$ doğrultmanı ise $y = -\frac{1}{5}$ dir.

Parabolün dış merkezliği $e = 1$ dir.

3) $A = 4m$, $B = (1+4m)$ ve $C = m$ olmak üzere

$4AC - B^2 = 0$ olmalıdır. Buradan

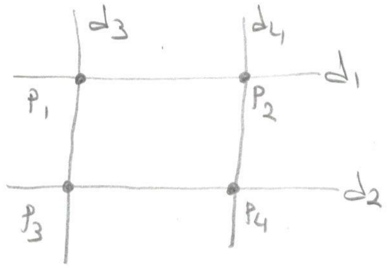
$$16m^2 - (1+4m)^2 = 0 \Rightarrow 16m^2 - 16m^2 - 8m - 1 = 0$$
$$\Rightarrow m = -\frac{1}{8}$$

bulunur. $m = -\frac{1}{8}$ aile denkleminde yazılırsa

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{8}y^2 - x + 2y = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 16y = 0$$

parabol denklemi bulunur.

4) $P_1(0,1)$, $P_2(1,0)$, $P_3(-1,1)$, $P_4(-1,2)$ ve $P_5(0,0)$ olsun.



$P_1 - P_2$ den geçen d_1 için $m_{d_1} = -\frac{1}{1} = -1$ olup

$d_1 \ldots y = -(x-1) \Rightarrow d_1 \ldots x + y - 1 = 0$

olur.

$P_3 - P_4$ den geçen d_2 için $d_2 \ldots x + 1 = 0$

olur. $\Phi_1(x,y) = d_1 . d_2 = 0$

$$\Rightarrow \Phi_1(x,y) = (x+y-1)(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow \Phi_1(x,y) = x^2 + x + xy + y - x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \Phi_1(x,y) = x^2 + xy + y - 1 = 0$$

bulunur.

$P_1 - P_3$ den geçen d_3 doğrusu için $d_3 \ldots y - 1 = 0$ olur.

$P_2 - P_4$ den geçen d_4 doğrusu için $m_{d_4} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow d_4 \ldots y + x - 1 = 0$ olur.

$\Phi_2(x,y) = d_3 . d_4 = 0$

$$\Rightarrow \Phi_2(x,y) = (y-1)(y+x-1) = 0$$
$$\Rightarrow \Phi_2(x,y) = y^2 + xy - 2y - x + 1 = 0$$

bulunur. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere P_1, P_2, P_3 ve P_4 den geçen konik ailesinin denklemi

$$\Phi_1 + \lambda \Phi_2 = 0 \Rightarrow x^2 + (\lambda+1)xy + \lambda y^2 - \lambda x + (1-2\lambda)y - 1 + \lambda = 0$$

olur. $P_5(0,0)$ bu denklemde yazılırsa $\lambda = 1$ bulunur. $\lambda = 1$ için

$$x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0$$

denklemi bu 5 noktadan geçen koniğin denklemidir.

5) a) $2x^2+4y^2+9z^2=36 \Rightarrow \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$ elipsoid

b) $2x^2+4y^2-9z^2=-36 \Rightarrow -\dfrac{x^2}{18}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$ iki kanatlı hiperboloid

c) $2x^2+4y^2=z$ eliptik paraboloid

d) $2y^2-9z^2=x$ hiperbolik paraboloid

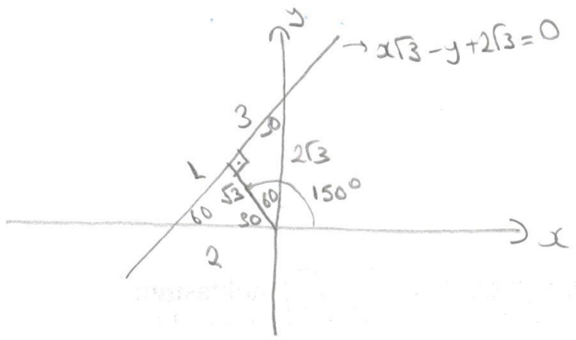
e) $xy-1=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{x}$ xy düzleminde hiperbol ve $z\in\mathbb{R}$ olduğundan hiperbolik silindir.

6) Orijin etrafında α açılı dönmenin denklemi $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$, $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ dır.

$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ için $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}y}{2} \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}x}{2} + \dfrac{y}{2} \end{cases}$ olur. $(0,2\sqrt{3}) = (x,y) \Rightarrow$

$(x',y') = (-3,\sqrt{3})$ olur. $(0,2\sqrt{3})$ noktasının resmi $(-3,\sqrt{3})$ bulunur.

7) Genel yansıma denklemi $x' = x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha + 2p\cos\theta$, $y' = x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha + 2p\sin\theta$ biçimindedir.



Burada $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, $\theta=\dfrac{5\pi}{3}$, $p=\sqrt{3}$ olur.

Böylece yansımanın denklemi

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}y}{2} + 2\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}x}{2} + \dfrac{y}{2} + 2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}y}{2} - 3 \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}x}{2} + \dfrac{y}{2} + \sqrt{3} \end{cases}$$

bulunur.